Lezione 10 c2

mercoledì 15 aprile 2026 14:31

Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Esercizio

Determinare inf e sup del seguente insieme

$$A = \left\{ \frac{2+10^n}{10^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Cerchiamo il sup.

Nota che $\frac{2+10^n}{10^n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Cerco maggiorante per A $x > 0$:

$$\frac{2+10^n}{10^n} \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{10^n} + 1 \leq x$$

$$\boxed{\frac{2}{10^n} \le x-1}$$ ⊛

se $x-1<0$ → la diseq mai soddisfatta
(1° membro positivo mentre 2° membro negativo)
ossia $\boxed{x<1}$ non possono essere maggioranti

sia $\boxed{x \geq 1}$ da ⊛ posso passare ai reciproci
(poiché ambo i membri positivi!!!)

$$\frac{10^n}{2} \geq \frac{1}{x-1}$$

$$10^n \geq \frac{2}{x-1}$$

prendo $\log_{10}$ di ambo i membri, per ottenere

$$\log_{10} 10^n \geq \log_{10}\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

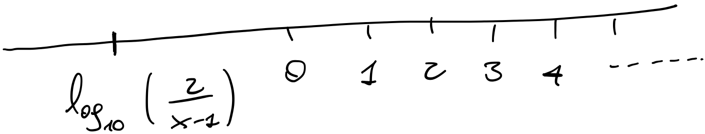
(Ricordo che $\log_a z$ è crescente per $a>1$)

$$\boxed{n \geq \log_{10}\left(\frac{2}{x-1}\right)}$$

Impongo che tali soluzioni coincidono con $\mathbb{N}$

Ossia: Affinché $x \geq 1$ sia maggiorante, deve accadere

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{sia} \quad n \geq \log_{10}\left(\frac{2}{x-1}\right)$$



ciò equivale a dire

$$\log_{10}\left(\frac{2}{x-1}\right) \leq 0$$

$$\log_{10}\left(\frac{2}{x-1}\right) \leq \log_{10}(10^0)$$

ricordo: $\boxed{z = \log_a a^z}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x-1} \leq 10^0$$

$$\frac{2}{} \leq 1$$

$x-1$

Ma $x-1>0$ $\Rightarrow$ $2 \leq x-1$

$\iff$ $2+1 \leq x$

ossia $\boxed{x \geq 3}$

Concludo $A^* = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \}$

$\Rightarrow$ $\sup A = \min A^* = 3$

Problema - $3 \in A$?

ossia $3 = \frac{2+10^n}{10^n}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$

$$3 \cdot 10^n = 2 + 10^n$$

$$3 \cdot 10^n - 10^n = 2$$

$$2 \cdot 10^n = 2$$

divido per 2

$$\Rightarrow \quad 10^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{n=0} \qquad \boxed{\text{OK}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3 = \max A}$$

Cerco minoranti per A.

Dalla nota iniziale sappiamo già che $0 \in A_*$

Cerco minoranti $\boxed{y>0}$

$$y \leq \frac{2+10^n}{10^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$y \leq \frac{2}{10^n} + 1$$

$$\boxed{y-1 \leq \frac{2}{10^n}} \qquad \circledast$$

se $\boxed{y-1<0}$ otteniamo che 1° membro negativo mentre 2° membro positivo

$\Rightarrow$ la diseq. è banalmente verificata :

Ogni $y<1$ è minorante

Cerco minoranti $\boxed{y \geq 1}$ da ⊛ passo ai reciproci

$$\frac{1}{y-1} \geq \frac{10^n}{2}$$

$$\frac{2}{y-1} \geq 10^n$$

$$\log_{10}\left(\frac{2}{y-1}\right) \geq \log_{10} 10^n$$

$$\iff \boxed{\log_{10}\left(\frac{2}{y-1}\right) \geq n}$$

Imponiamo che le soluzioni coincidano con $\mathbb{N}$: ossia

$$n \leq \log_{10}\left(\frac{2}{y-1}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ossia $\mathbb{N}$ è limitato superiorm.

$$\xcancel{=}$$

L'assurdo nasce dall'aver supposto un $y \geq 1$ che sia minorante

Concludo $A_* = \{ y \in \mathbb{R} : y \leq 1 \}$

$$\Rightarrow \boxed{\inf A = \max A_* = 1}$$

Problema $1 \in A$?

ossia $1 = \frac{2 + 10^n}{10^n}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$?

$$\cancel{10^n} = 2 + \cancel{10^n}$$

$0 = 2$ mai

$\Rightarrow$ $1 = \inf A$ ma non $\min A$!!!

Esercizio Determinare inf e sup di

$$A = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

scrivo $A = A_p \cup A_d$

dove $A_p = \left\{ \frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^+ \text{ pari} \right\}$

$$A_d = \left\{ -\frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^+ \text{ dispari} \right\}$$

Parto da $\boxed{\sup A_p}$

Noto che gli elementi di A_p sono tutti positivi

Cerco maggioranti per A_p $\boxed{x > 0}$

$$\frac{n-1}{n} \leq x \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ pari}$$

$$1 - \frac{1}{n} \leq x$$

$$-\frac{1}{n} \leq x - 1$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \geq 1-x} \quad \circledast$$

se $1-x \leq 0$ → la diseq. è banalm. verificata (poiché 1° membro positivo $\geq$ 2° membro negat.)

ossia ogni $\underline{x \geq 1}$ è maggiorante

Cerco maggioranti $x < 1$

Da $\circledast$ passo ai reciproci (poiché ambo i membri positivi)

$$\boxed{n \leq \frac{1}{1-x}}$$

Impongo che tali soluz. coincidano con $\mathbb{N}^+$ pari - ossia

$$n \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ pari}$$

ossia $\mathbb{N}^+$ pari deve essere limitato superiorm.

$$\nexists$$

L'assurdo nasce dall'aver supposto $x<1$ maggiorante

$\Rightarrow$ $A_p^* = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sup A_p = \min A_p^* = 1}$

Problema $1 \in A_p$?

$1 = \frac{n-1}{n}$ per qualche n pari ?

$\cancel{n} = \cancel{n} - 1$

$0 = -1$ mai NO

$1 = \sup A_p$ ma non $\max A_p$

Cerco minoranti per A_p - All'inizio abbiamo già notato che $0 \in (A_p)_*$

Cerco minorante $\boxed{y>0}$

$$y \le \frac{n-1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ pari}$$

$$y \le 1 - \frac{1}{n}$$

$$y - 1 \le -\frac{1}{n}$$

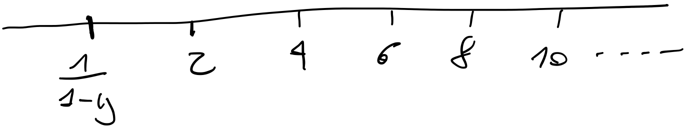
$$\boxed{1 - y \ge \frac{1}{n}} \quad (**)$$

se $\boxed{1-y<0}$ la diseq. non può essere verificata (1° membro negativo $\ge$ 2° membro positivo $\ast$)

ossia $\boxed{y>1}$ non può essere minorante

sia $\boxed{y\le 1}$ da $(**)$ posso passare ai reciproci

$$\boxed{\frac{1}{1-y} \le n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ pari}$$



Ciò equivale a dire

$$\boxed{\frac{1}{1-y} \le 2}$$

$$1-y \ge \frac{1}{2}$$

$$-y \ge \frac{1}{2} - 1$$

$$y \le 1 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y \le \frac{1}{2}}$$

$$(A_P)_* = \left\{ y \in \mathbb{R} \ : \ y \le \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \inf A_P = \max (A_P)_* = \frac{1}{2}$$

Problema $\quad \frac{1}{2} \in A_P$?

ossia $\frac{1}{2} = \frac{n-1}{n}$ per qualche n pari

$$\frac{n}{2} = n - 1$$

$$\frac{n}{2} - n = -1$$

$$-\frac{n}{2} = -1$$

$$\frac{n}{2} = 1 \iff n = 2 \quad \text{OK}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = \min A_p}$$

Studio $A_d = \left\{ -\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \text{ dispari} \right\}$

Noto che A_d è formato da numeri negativi

ossia $0 \in A_d^*$

Cerco maggioranti $x<0$

$$-\frac{n-1}{n} \le x \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ disp}$$

$$-\left[1-\frac{1}{n}\right] \le x$$

$$-1+\frac{1}{n} \le x$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \le x+1} \qquad ⊛$$

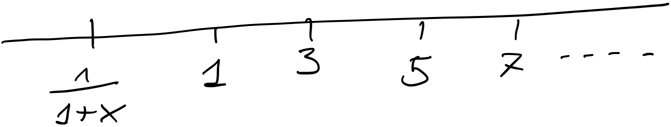
Se $x+1<0 \Rightarrow$ ⊛ mai soddisfatta

ossia $x<-1$ Non maggiorante

Se invece $x \ge -1$ $(x+1 \ge 0)$

Da ⊛ posso passare ai reciproci,

$$\boxed{n \ge \frac{1}{x+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ disp}$$



ciò equivale a che

$$\frac{1}{1+x} \le 1$$

$(-1 \le x < 0)$

$$\iff \cancel{1}+x \ge \cancel{1}$$

$$\boxed{x \ge 0}$$

OPS!!!

Concludo che non ci sono maggioranti

$\boxed{x<0}$

$$\Rightarrow \quad A_d^* = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$$

$$\Rightarrow \quad \sup A_d = \min A_d^* = 0$$

Problema $\quad 0 \in A_d$?

ossia $\quad 0 = -\frac{n-1}{n}$ per qualche

n disp ?

$$\iff \quad n-1=0$$

$$\iff \quad n=1 \qquad \text{si}$$

$$\Rightarrow \quad 0=\max A_d$$

Cerco minoranti $y<0$

$$y \le -\frac{n-1}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+ \text{ disp}$$

$$y \le -\left[1-\frac{1}{n}\right]$$

$$y \le -1+\frac{1}{n}$$

$$\boxed{y+1 \le \frac{1}{n}} \qquad (**)$$

se $y+1<0$ allora banalm. verificata

ossia che ogni $y<-1$ è minorante

caso $\boxed{y \geq -1}$ posso passare ai reciproci da $\boxed{**}$

$$\boxed{\frac{1}{y+1} \geq n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ disp}$$

Ossia $\mathbb{N}^+$ dispari deve lim sup $\nexists$

L'assurdo nasce dall'aver supposto $y > -1$ minorante

$$(A_d)_* = \{ y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \}$$

$$\Rightarrow \quad \inf A_d = \max (A_d)_* = -1$$

Problema $\quad -1 \in A_d$?

$$\Leftrightarrow \quad -1 = -\frac{n-1}{n}$$ per qualche n dispari?

$$1 = \frac{n-1}{n}$$

$$\cancel{1} = \cancel{1} - \frac{1}{n}$$

$$0 = -\frac{1}{n} \qquad \boxed{\text{mai}}$$

$\Rightarrow \; -1 = \inf A_d$ ma non $\min A_d$

Conclusioni:

$$\sup A = \max\{1, 0\} = 1$$

ma non è $\max A$

$$\inf A = \min\left\{\frac{1}{2}, -1\right\} = -1$$

che non è $\min A$ ∎

Esercizio Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

CE = $1+x^2 \neq 0$ sempre soddisfatta

$CE =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2}$$

$y = 0$ è Asint. Orizz.

Monotonia $\left(f'(x) \geq 0 \right)$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

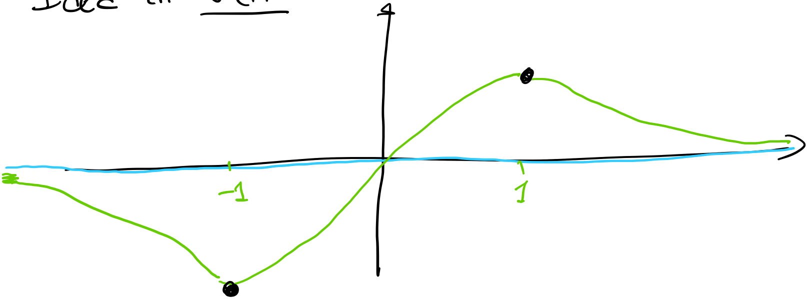
$$= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff -x^2+1 \geq 0$$

$$x^2 \leq 1$$

$$\iff -1 \leq x \leq 1$$

Idea di Grafico



$x = -1$ è min assoluto (punti!)

$x = 1$ è max assoluto

Convessità

$(f''(x) \geq 0)$

Ricordo $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

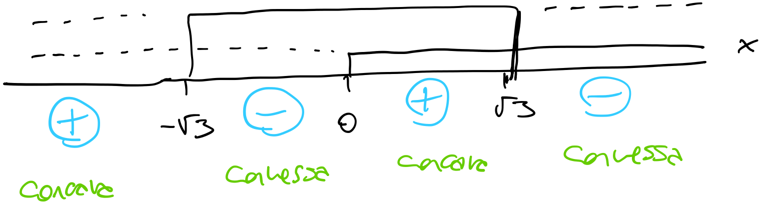
$$= \frac{-2x\ (1+x^2)}{(1+x^2)^4} \left[1 + x^2 + 2(1-x^2) \right]$$

$$= \frac{-2x\,\boxed{(1+x^2)}}{\boxed{(1+x^2)^4}}\,[3-x^2]$$

≥ 0

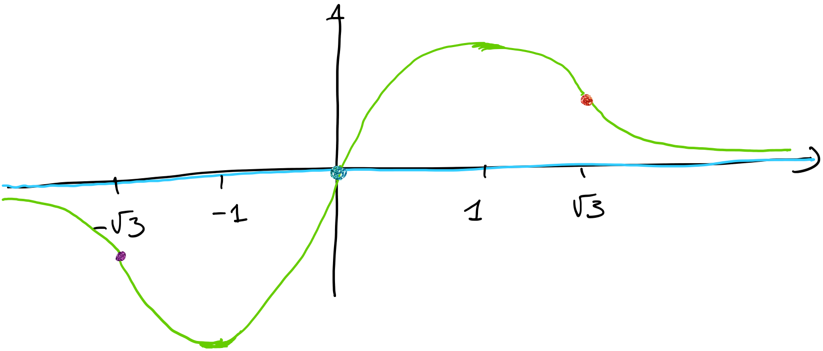
$$f''(x) \geq 0 \iff -2x\,(3-x^2) \geq 0$$

$$\iff x\,(3-x^2) \leq 0$$



$$3-x^2 \geq 0 \iff x^2-3 \leq 0 \iff -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

Tracciamo il grafico ($\pm\sqrt{3}$, 0 sono flessi)



Esercizio Studiare la Funzione

$$F(x) = \frac{|x|}{x+3}$$

CE $x+3 \neq 0 \iff \boxed{x \neq -3}$

CE $]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

Riscrivo

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+3} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{-x}{x+3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{-x}{x+3} = \left(\frac{-(-3)}{-3+3} = \frac{3}{0^-} \right)$$

$$= -\infty$$

$x \to -3^-$ significa $x < -3 \iff x+3<0$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{-x}{x+3} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=-3$ è Asintoto verticale

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+3} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+3} = 1$$

$\Rightarrow$ $y=-1$ è asintoto Orizz. sinistro

$y=1$ è asintoto Orizz. destro

Studio $f'(x)$

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot (\cancel{x}+3) - \cancel{x} \cdot 1}{(x+3)^2} & \boxed{x>0} \\ \\ -\dfrac{(x+3)-x}{(x+3)^2} & \boxed{x<0} \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x+3)^2} & \boxed{x>0} \\[2ex] -\dfrac{3}{(x+3)^2} & \boxed{x<0} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} F'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{3}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(0+3)^2} = -\frac{1}{3}$$

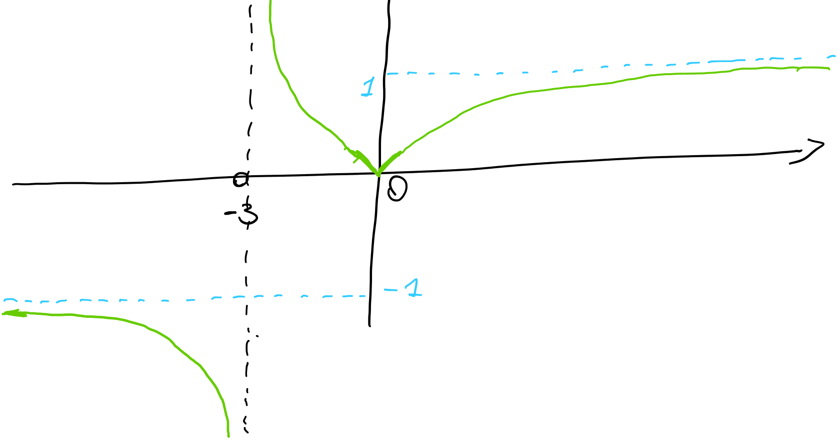
$$\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{(x+3)^2} = \frac{3}{(0+3)^2} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ f(x) non è derivabile in $x=0$
(punto angoloso)

$$\boxed{F'(x) \geq 0} \quad \begin{cases} \nearrow & f(x) \text{ cresce in }]0,+\infty[\\ \searrow & f(x) \text{ decresce in }]-\infty,0[\end{cases}$$

Idea di Grafico

1 4



$x=0$ è $\underline{\text{min}}$ $\underline{\text{rel}}$

$\inf f = -\infty$ $\sup f = +\infty$

Ricordo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x+3)^2} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{-3}{(x+3)^2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -6\,\dfrac{(x+3)}{(x+3)^4} & x>0 \\ 6\,\dfrac{(x+3)}{(x+3)^4} & x<0 \end{cases}$$

Ricordo : $\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}}$

$$\left(\frac{3}{(x+3)^2}\right)' = 3\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right)' \overset{\text{form.}}{=}$$

$$= 3\,\frac{-[2(x+3)\cdot 1]}{(x+3)^4}$$

Studio $\boxed{f''(x) \geq 0}$

caso $x>0$

$$\frac{-6\,\overset{>0}{(x+3)}}{\underset{>0}{(x+3)^4}} \geq 0$$

Mai

$\Rightarrow$ $x>0$ la funzione è concava

caso $x<0$:

$$\frac{\overset{>0}{6}\,(x+3)}{\underset{>0}{(x+3)^4}} \geq 0$$

$\iff \quad x+3 \geq 0$

$\iff \quad \boxed{x \geq -3}$

$\Rightarrow$ f(x) è concava in $]-\infty, -3[$

f(x) è convessa in $]-3, 0[$

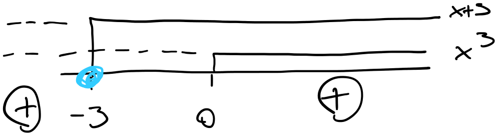
$\boxed{x=0}$ è flesso

$\Rightarrow$ Grafico = Idea di Grafico

Esercizio Tracciare un grafico qualitativo di

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

$$CE = \frac{x^3}{x+3} \geq 0 \qquad x+3 \neq 0$$



CE $\left]-\infty, -3\right[\cup \left[0, +\infty\right[$

$$\lim_{x \to -3^-} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \left(\sqrt{\frac{-27}{-3+3}} = \sqrt{\frac{-27}{0^-}} \right)$$

$$= +\infty$$

$x=-3$ è Asintoto verticale sinistro

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

Ricordo $\sqrt{a^2} = |a|$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{x^2}} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \circledast$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \qquad (x<0)$$

$$⊛ = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x+3)}} = -\sqrt{1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (-1)x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x = \left(+\infty - \infty\right) \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x\right) \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - 3x^2}{x+3}}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{(x+3)\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x\right]} =$$

$$= -3 \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to -1}{x^2}}{(x+3)(-x)\underbrace{\left[\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1\right]}_{\to 2}}$$

$$= -3 \cdot \frac{(-1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = -x + \frac{3}{2}$ è asintoto Obliquo

sinistro